MATHÉMATIQUES : ÉPREUVE A

COMMUNE AUX DEUX FILIÈRES

DURÉE : 3 heures 00.

N.B.* : *Les calculatrices sont interdites.
Ce sujet comporte deux pages de texte.
Les trois parties du problème sont indépendantes.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Quelles sont les racines complexes du polynôme $P(t) = t^4 + 1$? En déduire une factorisation de ce polynôme en deux facteurs réels du second degré.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)}$ existe et calculer sa valeur.

3. Soit α un réel strictement positif. Pour quel ensemble de valeurs de α l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan } t}{t^\alpha}\, dt$ existe-t-elle? Calculer sa valeur lorsque $\alpha = \frac{3}{2}$.

4. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan } t}{t^{3/2}+t^n}\, dt$.

DEUXIÈME PARTIE

On considère dans cette partie la fonction de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan } (tx)}{1+t^2}\, dt$$

I

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Quelle propriété de symétrie possède-t-elle ? Etablir le tableau de variations de cette fonction sur l'intervalle $[0, +\infty[$, en précisant les valeurs $F(0)$, $F(1)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$, que l'on aura déterminées.

2. Prouver que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et donner une expression de $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

3. Calculer l'intégrale de la question précédente lorsque x est différent de 1. Que vaut $F'(1)$?

II

1. Montrer que pour $\alpha \geq 0$ l'intégrale $J_\alpha = \int_0^1 x^\alpha \ln x \, dx$ existe. Calculer J_{2n} pour tout $n \geq 0$ entier.

2. Prouver l'égalité $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} \, dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} J_{2n}$.

3. En utilisant le résultat de $I.3$, déterminer la valeur de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

TROISIÈME PARTIE

1. On considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad x^2y'' + xy' + (4x^4 - 1)y = 0$$

qu'on veut intégrer sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Montrer qu'il existe $R > 0$ et une fonction y_0 développable en série entière sur $]-R,R[$ qui coïncide sur $]0,R[$ avec une solution de $(\mathcal{E})$ (qu'on notera également y_0). Donner une expression simple de y_0 utilisant les fonctions usuelles, soumise à la condition supplémentaire $y_0'(0) = 1$.

2. Déterminer une solution y_1 de $(\mathcal{E})$ linéairement indépendante de y_0. Achever la résolution de $(\mathcal{E})$.

3. a) Former une équation différentielle :

$$(\mathcal{E}') \quad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, telle que y est solution de $(\mathcal{E}')$ si et seulement si $\frac{y}{x}$ est solution de $(\mathcal{E})$.

b) Soit f une fonction de classe C^3 sur $]0,+\infty[$. Former une équation différentielle que doit vérifier f pour que $(\mathcal{E}')$ ait deux solutions y_1 et y_2 vérifiant $y_1^2 + y_2^2 = f$. Retrouver alors le résultat de la question **2**.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail